Nome: ______ Unidade: ______

Curso: ______ Sala: ______ Matrícula: ______ **Nota:** ______

**QUESTÃO 1 (valor 50 pontos)**

(UFSCAR) Em seu trabalho, João tem 5 amigos, sendo 3 homens e 2 mulheres. Já sua esposa Maria tem, em seu trabalho, 4 amigos (distintos dos de João), sendo 2 homens e 2 mulheres. Para uma confraternização, João e Maria pretendem convidar 6 dessas pessoas, sendo exatamente 3 homens e 3 mulheres. Determine de quantas maneiras eles podem convidar essas pessoas:

a) dentre todos os seus amigos no trabalho.

*Seja $H_J$ = amigo de João, $H_M$ = amigo de Maria, $M_J$ = amiga de João e $M_M$ = amiga de Maria*

$\underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M} = 1 . 1 . 2 = 2$

$\underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M}\ \underline{M_M} = 1 . 2 . 1 = 2$

$\underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M} = C_{3,2} . 2 . 1 . 2 = 3 . 2 . 2 = 12$

$\underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M}\ \underline{M_M} = C_{3,2} . 2 . 2 . 1 = 3 . 2 . 2 = 12$

$\underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M} = 3 . 1 . 1 . 2 = 6$

$\underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M}\ \underline{M_M} = 3 . 1 . 2 . 1 = 6$

*Número de maneiras que João e Maria podem convidar essas pessoas é 40.*

b) de forma que cada um deles convide exatamente 3 pessoas, dentre seus respectivos amigos.

$\underline{H_J}\ \underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M}\ \underline{M_M} = 12$

$\underline{H_J}\ \underline{H_M}\ \underline{H_M}\ \underline{M_J}\ \underline{M_J}\ \underline{M_M} = \underline{6}$ .

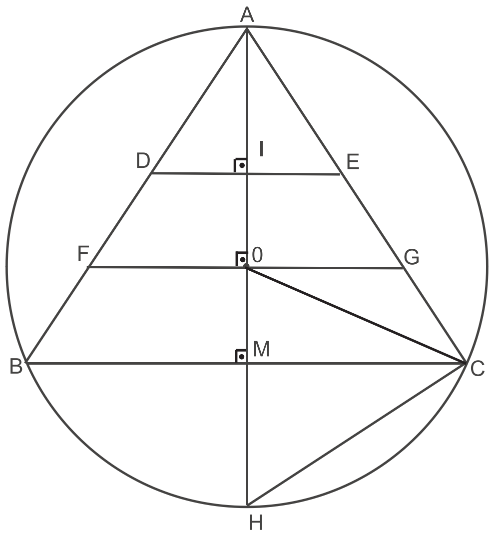
$18$

Nome: ____________________ Unidade: ____________

Curso: __________ Sala: __________ Matrícula: __________ **Nota:** __________

**QUESTÃO 2 (valor 50 pontos)**

Observe a figura abaixo




Nessa figura, temos

- O triângulo ABC é isósceles e inscrito no círculo de centro O e raio R.
- Os segmentos DE, FG e BC são paralelos e estão, nessa ordem, em PA.
- Os segmentos AI, IO e OM estão, nessa ordem, em PG.

a) Prove que $IE = \dfrac{MC}{3}$ .

*$FG = \dfrac{DE + BC}{2}$ logo FG é base média do trapézio DECB, logo F e G são pontos médios de DB e EC respectivamente.*

*Então "O" é médio de IM, logo IO = OM.*

*$(IO)^2 = AI.OM$, logo $(OM)^{\cancel{2}} = AI.\cancel{OM}$, OM = AI*

*Portanto OM = OI = AI*

*Então $IE = \dfrac{OG}{2}$ (base média do $\Delta AOG$)*

*Sabemos que $OG = \dfrac{MC + IE}{2}$*

*$2IE = \dfrac{MC + IE}{2}$*

*$4IE = MC + IE$*

*$MC = 3IE$*

$$\boxed{IE = \frac{MC}{3}}$$

b) Determine em função do raio R a área do trapézio IECM.

*No DOCM retângulo em M, temos*

$(OC)^2 = (OM)^2 + (MC)^2$

$R^2 = (R/2)^2 + (MC)^2$

$(MC)^2 = \dfrac{3R^2}{4}$

$MC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$IE = \dfrac{R\sqrt{3}}{6}$

$S = \dfrac{(MC + IE)MI}{2}$

$S = \dfrac{\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R\sqrt{3}}{6}\right)R}{2}$

$S = \dfrac{\dfrac{4R^2\sqrt{3}}{6}}{2}$

$\boxed{S = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}}$

c) Mostre que o triângulo ABC é eqüilátero.

*M é médio de BC, pois AM é altura, mediana e bissetriz.*

*Logo,* $BC = 2MC = R\sqrt{3}$

*Sabemos que* $AM = \dfrac{3R}{2}$

*No* $\Delta AMC$*, retângulo em M, temos*

$(AC)^2 = \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BR}{2}\right)^2$

$(AC)^2 = \dfrac{3BR^2}{4} + \dfrac{9R^2}{4}$

$(AC)^2 = 3R^2$

$AC = R\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Como } AC = AB = BC, \text{ o } \Delta ABC \text{ é equilátero}}$

d) Determine, em função de R, a área do triângulo AHC.

*O* $\Delta ACH$ *é retângulo em C.*

*O* $\Delta OCH$ *é equilátero de lado R, logo HC = R.*

$S_{\Delta ACH} = \dfrac{AC.\ HC}{2} = \dfrac{R.\ R\ \sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S_{\Delta ACH} = \dfrac{R^2\ \sqrt{3}}{2}}$