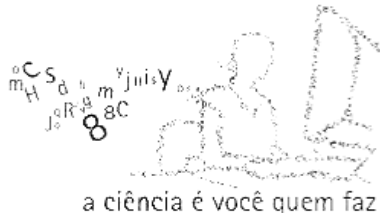


MATEMÁTICA

vestibular UFMG 2008

Prova de 2ª Etapa



SÓ ABRA QUANDO AUTORIZADO.

Leia atentamente as instruções que se seguem.

- 1 - Este Caderno de Prova contém **oito** questões, constituídas de itens e subitens, e é composto de **dezesseis** páginas, numeradas de 3 a 15. Antes de começar a resolver as questões, verifique se seu Caderno está **completo**. Caso haja algum problema, solicite a **substituição** deste Caderno.

ATENÇÃO: Os Aplicadores **NÃO** estão autorizados a dar quaisquer explicações sobre questões das provas. **NÃO INSISTA** em pedir-lhes ajuda.

- 2 - Esta prova vale **100** pontos, assim distribuídos:
 - Questões 01, 04, 06 e 07: **12** pontos cada uma.
 - Questões 02, 03, 05 e 08: **13** pontos cada uma.
- 3 - **NÃO escreva seu nome nem assine nas folhas desta prova.**
- 4 - Leia cuidadosamente cada questão da prova e escreva a solução, **A LÁPIS**, nos espaços correspondentes. Só será corrigido o que estiver dentro desses espaços. **NÃO** há, porém, obrigatoriedade de preenchimento **total** desses espaços.
- 5 - **NÃO** serão consideradas respostas sem exposição de raciocínio.
- 6 - Não escreva nos espaços reservados à correção.
- 7 - Ao terminar a prova, entregue este Caderno ao Aplicador.

FAÇA LETRA LEGÍVEL.

Duração desta prova: TRÊS HORAS.

ATENÇÃO: Terminada a prova, recolha seus objetos, deixe a sala e, em seguida, o prédio. A partir do momento em que sair da sala e até estar fora do prédio, continuam válidas as proibições ao uso de aparelhos eletrônicos e celulares, bem como não lhe é mais permitido o uso dos sanitários.

Impressão digital do
polegar direito
DIGITAL

DIGITAL

DIGITAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

QUESTÃO 01

Um professor de Matemática escreve no quadro os n primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$-50, -46, -42, \dots, a_n.$$

Se esse professor apagar o décimo termo dessa seqüência, a média aritmética dos termos restantes será 23.

CALCULE o termo a_n .

$$a_n = a_1 + (n-1)r = -50 + (n-1)4 = 4n - 54, a_{10} = 40 - 54 \Rightarrow a_{10} = -14$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

$$S_n = \frac{(-50 + 4n - 54) \frac{n}{2} + 14}{n-1} = 23$$

$$-52n + 2n^2 + 14 = 23n - 23$$

$$2n^2 - 75n + 37 = 0$$

$$n = 37 \quad n = \frac{1}{2} \text{ n. serve}$$

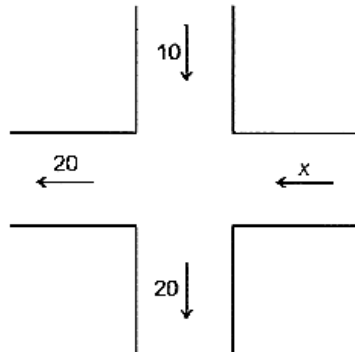
$$\text{Resposta } a_{37} = a_1 + 36r = -50 + 36 \cdot 4 = 94$$

$$\text{Resposta} = 94$$



QUESTÃO 02

1. Suponha que, num cruzamento de ruas de mão única, as médias de veículos que, por minuto, entram e saem desse cruzamento são mostradas neste diagrama:



Seja x a média de veículos que entram, por minuto, no cruzamento, pela rua horizontal, no sentido leste-oeste.

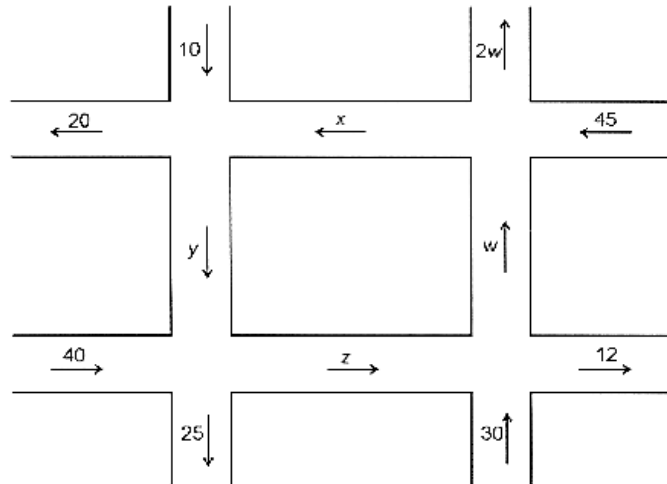
CALCULE o valor de x .

entram $x + 10$
saem 40

$$x + 10 = 40$$

$$x = 30$$

2. Suponha, agora, que, numa região do centro de uma cidade, com ruas de mão única, as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem dos cruzamentos são mostradas neste diagrama:



Sejam x , y , z e w as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem de cada um dos quatro cruzamentos, mostrados nesse diagrama.

CALCULE os valores de x , y , z e w .

2.

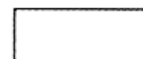
$$\begin{cases} x + 10 = y + 20 \\ w + 45 = x + 2w \\ y + 40 = 25 + z \\ z + 30 = w + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 10 & (1) \\ x + w = 45 & (2) \\ z - y = 15 & (3) \\ z - w = -18 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) \quad w + y &= 35 & (5) \\ (3) + (4) \quad -w + y &= -33 & (6) \\ (5) + (6) \quad 2y &= 2 \quad y = 1 \rightarrow w = 34 \\ x = 11 \rightarrow z &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 11 \\ y &= 1 \\ z &= 16 \\ w &= 34 \end{aligned}$$

QUESTÃO 02

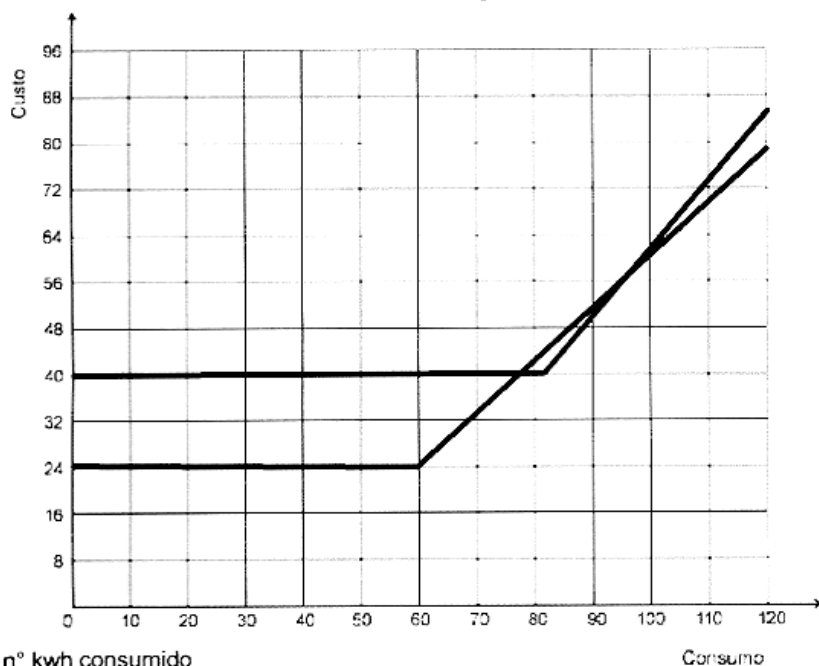


QUESTÃO 03

Uma concessionária de energia elétrica de certo estado brasileiro possui dois planos de cobrança para consumo residencial:

- o Plano **I** consiste em uma taxa mensal fixa de R\$ 24,00, que permite o consumo de até 60 kWh, e, a partir desse valor, cada kWh extra consumido custa R\$ 0,90;
- o Plano **II** consiste em uma taxa mensal fixa de R\$ 40,00, que permite o consumo de até 80 kWh, e, a partir desse valor, cada kWh extra consumido custa R\$ 1,10.

1. **ESBOCE**, no sistema de coordenadas abaixo, os gráficos das funções que representam o custo para o consumidor, em função do consumo de energia elétrica, no Plano **I** e no Plano **II**.



x nº kwh consumido

$$\text{Plano I } C_1(x) = \begin{cases} 24,00 & x \leq 60 \\ 24 + (x - 60) \cdot 0,90 & x > 60 \end{cases}$$

$$\text{Plano II } C_2(x) = \begin{cases} 40,00 & x \leq 80 \\ 40 + (x - 80) \cdot 1,1 & x > 80 \end{cases}$$

2. DETERMINE a faixa de consumo em que o Plano II é mais vantajoso para o consumidor.

$$40 + (x - 80)1,1 < 24 + (x - 60) \cdot 0,09$$

$$40 + 1,1x - 88 < 24 + 0,9x - 54$$

$$0,2x < 48 - 30$$

$$0,2x < 18$$

$$x < \frac{18}{0,2} \quad x < 90$$

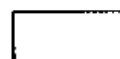
$$24 + (x - 60) \cdot 0,9 = 40$$

$$0,9x = 54 + 40 - 24$$

$$0,9x = 70$$

$$x = \frac{70}{0,9} = 77,7$$

Resposta: $77,7 < x < 90$



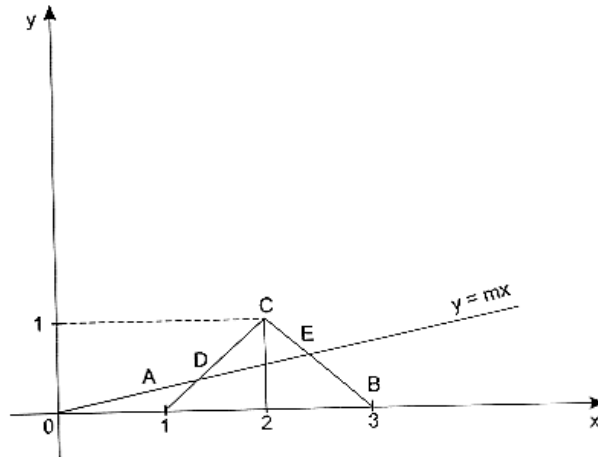
QUESTÃO 03



QUESTÃO 04

Seja ABC um triângulo cujos vértices, em coordenadas cartesianas, são $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (2, 1)$

CALCULE a inclinação m da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e divide esse triângulo em duas regiões de áreas iguais.



$y = mx$ (reta que passa por $(0,0)$)

Reta $AB \rightarrow y = x - 1$

Reta $BC \rightarrow y = -x + 3$

Interseção reta $y = mx$ c/ $y = x - 1$

$$mx = x - 1 \quad x = \frac{-1}{m-1}, y = \frac{-m}{m-1} \quad D = \left(\frac{-1}{m-1}, \frac{-m}{m-1} \right)$$

interseção reta $y = mx$ c/ $y = -x + 3$ $\left(\frac{3}{m+1}, \frac{3m}{m+1} \right)$

$$x = \frac{3}{m+1} \quad y = \frac{3m}{m+1}$$

$$\text{área } \triangle ABC = 1 \quad \text{área } \triangle DCE = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -m & 1 \\ \frac{3}{m+1} & \frac{3m}{m+1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

1º

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -m & 1 \\ \frac{3}{m+1} & \frac{3m}{m+1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cancel{3m}}{m^2-1} + \frac{3}{m+1} - \frac{2m}{m-1} - \frac{6m}{m+1} - \frac{1}{m-1} + \frac{\cancel{3m}}{m^2-1} = 1$$

$$\frac{-2m+1}{m-1} + \frac{3-6m}{m+1} = 1$$

$$(-2m+1)(m+1) + (3-6m)(m-1) = m^2-1$$

$$-2m^2 - 2m + m + 1 + 3m - 6m^2 - 3 + 6m - m^2 + 1 = 0$$

$$-9m^2 + 8m - 1 = 0$$

$$9m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{18}$$

$$m = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$$

② determinante = $-\frac{1}{2}$

$$-7m^2 + 8m - 3 = 0$$

$$7m^2 - 8m + 3 = 0$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64-84}}{14} \quad \cancel{\neq}$$

Resposta: $m = \frac{4 - \sqrt{7}}{9}$ pois $0 < m < \frac{1}{2}$

QUESTÃO 05

Considere o sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = a^2 \\ y = |x| \end{cases}$$

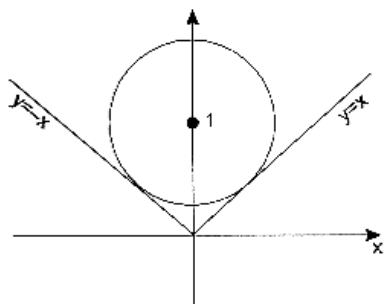
em que a é um número real positivo.

DETERMINE o número de soluções distintas desse sistema em função de a .

QUESTÃO 05

$x^2 + (y-1)^2 = a^2$ Circunferência de centro $(0,1)$ e

$$y = |x| = \begin{cases} y = x & x \geq 0 \\ y = -x & x < 0 \end{cases}$$



distância de $(0,1)$ a reta $y - x = 0$ e a reta $y + x = 0$ é

$$d = \frac{|1-0|}{\sqrt{2}} \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

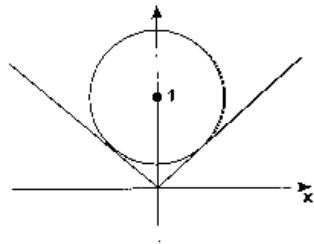
1) Se $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ sistema possui 2 soluções

QUESTÃO 04

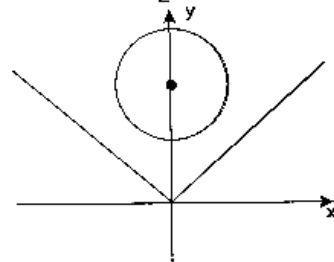


QUESTÃO 05

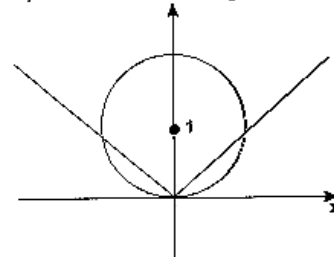




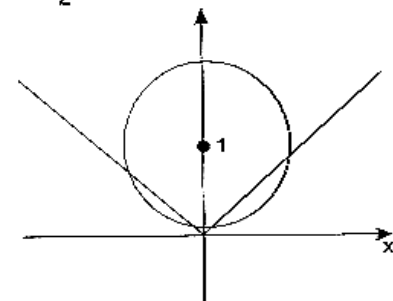
2) Se $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ sistema não possui solução



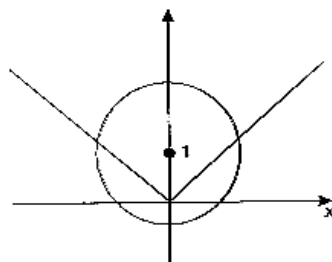
3) Se $a = 1 \rightarrow 3$ soluções



4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1 \rightarrow 4$ soluções

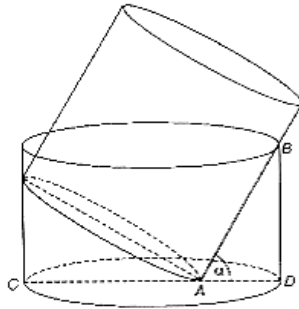


5) $a > 1 \rightarrow 2$ soluções



QUESTÃO 06

Nesta figura, estão representados um tanque cilíndrico e um cilindro sólido metálico, ambos circulares retos:



O cilindro sólido encontra-se apoiado sobre o fundo e a lateral do tanque, que está, inicialmente, vazio.

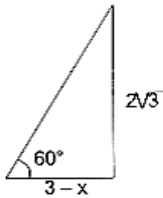
Sabe-se que

- a altura e o raio do tanque medem, respectivamente, $2\sqrt{3}$ m e 3 m;
- o ponto A pertence ao diâmetro CD da base do tanque; e
- o ângulo $\alpha = \widehat{BAD}$ mede 60° .

1. CALCULE o raio do cilindro sólido metálico.

QUESTÃO 06

1.
 $\triangle ADB$

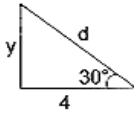


$$\operatorname{tag} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3-x}$$

$$\sqrt{3}(3-x) = 2\sqrt{3}$$

$$x = 1$$

$\triangle CEA$



$$\operatorname{tag} 30^\circ = \frac{y}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 = y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$d = \frac{16}{3} \div 16 = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

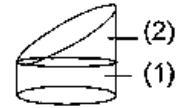
$$\text{raio} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$





2. **CALCULE** o volume de água necessário para, na situação descrita, se encher completamente o tanque.

2. Volume tanque $9\pi \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi$



Volume tronco

$$\text{Volume (1)} \pi \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{4}{3}$$

$$\text{Volume (2)} \pi \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$V. \text{ água} = \left(18\sqrt{3}\pi - \frac{128\pi}{9} \right) \text{m}^3$$

QUESTÃO 06



QUESTÃO 07

Lilian possui sete pares de meias brancas, quatro pares de meias cinza, três pares de meias pretas e cinco pares de meias azuis.

Sabe-se que as meias de mesma cor são idênticas.

Suponha que todas essas meias estão embaralhadas em uma gaveta e que Lilian retira dela, aleatoriamente, certo número de meias.

Considerando essas informações, **DETERMINE**

1. o número **mínimo** de pés de meia que Lilian deve retirar dessa gaveta para ter certeza de ter, **pelo menos**, um par de meias de uma mesma cor.

$$\left. \begin{array}{l} 14b \\ 8c \\ 6P \\ 10A \end{array} \right\} 38 \quad \text{Resposta cinco}$$

2. a probabilidade de Lilian, ao retirar **exatamente** dois pés de meia dessa gaveta, obter **um** par de meias de uma mesma cor.

$$\text{tirar 2 brancas } \frac{14}{38} \times \frac{13}{37}$$

$$\text{tirar 2 cinzas } \frac{8}{38} \times \frac{7}{37}$$

$$\text{tirar 2 pretas } \frac{6}{38} \times \frac{5}{37}$$

$$\text{tirar 2 azuis } \frac{10}{38} \times \frac{9}{37}$$

$$\frac{14 \times 13 + 56 + 30 + 90}{38 \times 37} = \frac{7 \times 13 + 28 + 15 + 45}{19 \times 37}$$

$$\frac{91 + 88}{703} = \frac{179}{703}$$

$$\text{Resposta: } \frac{179}{703}$$

3. a probabilidade de Llian, ao retirar quatro pés de meia dessa gaveta, obter, pelo menos, um par de meias de uma mesma cor.

3.

Com 4 meias formamos 1 par ou 2 pares ou nenhum. Só não serve nenhum

B C P A → 4!

$$\frac{14}{38} \times \frac{8}{37} \times \frac{6}{36} \times \frac{10}{35}$$
$$\frac{2 \times 8 \times 1 \times 5}{19 \times 37 \times 6 \times 7} \times 24$$
$$\frac{2 \times 32}{703} = \frac{64}{703} \Rightarrow \frac{639}{703}$$

QUESTÃO 07



QUESTÃO 08

1. **ESCREVA** na forma trigonométrica os números complexos

$$(\sqrt{3} + i) \text{ e } 2\sqrt{2}(1+i),$$

em que $i^2 = -1$.

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$$

2. **CALCULE** os menores inteiros positivos m e n tais que

$$(\sqrt{3} + i)^m = [2\sqrt{2}(1+i)]^n.$$

$$2^m \left(\cos m \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} m \frac{\pi}{6} \right) = 4^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2^m = 4^n \text{ e } \frac{m\pi}{6} = n \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2^m = 4^n$$

$$m = 2n$$

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{4} + 2k$$

$$2m - 3n - 24k = 0$$

$$4n - 3n - 24k = 0$$

$$n = 24k$$

$$k = 1 \quad n = 24 \Rightarrow m = 48$$