

Gabarito da prova aberta da UFMG / 2010.

### QUESTÃO 01

Considere a região  $R$  do plano cartesiano dada por

$$R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\}.$$

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas do ponto  $P \in R$  que possui a **maior** abscissa.

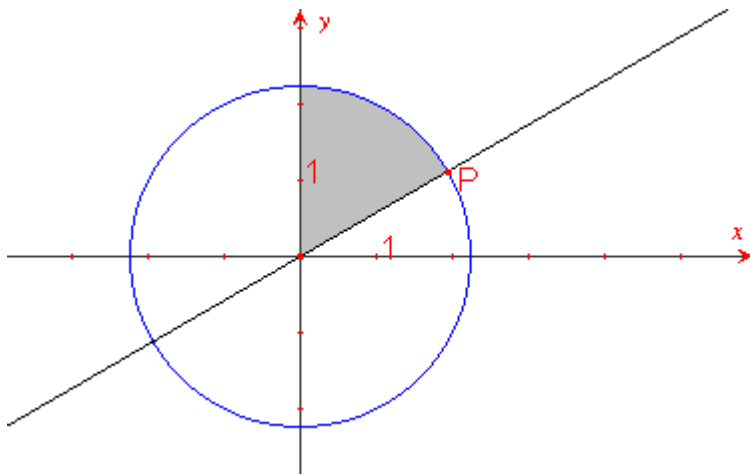
Se  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x$  então  $x \geq 0$ , assim, só interessam pontos do 1º e 4º quadrantes.

A inequação  $\frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y$  é um semiplano definido pela reta  $\frac{1}{\sqrt{3}}x = y$ , que é uma reta crescente que passa pela origem e faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ . Sabemos que o ângulo é de  $30^\circ$  pois a inclinação da reta – que é a tangente desse ângulo – é  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

O semiplano em questão é o superior.

A inequação  $y \leq \sqrt{5-x^2}$ , como  $y$  também é positivo, pode ser escrita como  $x^2 + y^2 \leq 5$ , que representa o interior de uma circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$ .

Assim, a região  $R$  é:



O ponto  $P$  de maior abscissa está representado. Ele é uma das interseções da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 5$  com a reta  $\frac{1}{\sqrt{3}}x = y$ . Resolvendo o sistema composto por essas duas equações e sabendo que  $x$  é positivo, determinamos que as coordenadas de  $P$  são  $\left( \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ .

## 2. CALCULE a área da região $R$ .

$R$  é uma setor circular de ângulo central  $60^\circ$  e raio  $r = \sqrt{5}$ .

Assim, a área de  $R$  é  $\frac{1}{6}\pi(\sqrt{5})^2 = \frac{5\pi}{6}$  u.a.

### QUESTÃO 02

Inicialmente, isto é, quando  $t = 0$ , um corpo, à temperatura de  $T_0$  °C, é deixado para esfriar num ambiente cuja temperatura é mantida constante e igual a  $T_a$  °C.

Considere  $T_0 > T_a$ .

Suponha que, após  $t$  horas, a temperatura  $T$  do corpo satisfaz a esta Lei de Resfriamento de Newton:

$$T = T_a + c5^{-kt},$$

em que  $c$  e  $k$  e são constantes positivas.

Suponha, ainda, que:

- a temperatura inicial é  $T_0 = 150$  °C ;
- a temperatura ambiente é  $T_a = 25$  °C ; e
- a temperatura do corpo após 1 hora é  $T_1 = 30$  °C .

Considerando essas informações,

1. **CALCULE** os valores das constantes  $c$  e  $k$ .

Foi dado que  $T = 25 + c5^{-kt}$ . Como em  $t = 0$  temos  $T = 150$ , podemos dizer que

$$150 = 25 + c5^0 \rightarrow c = 125$$

Além disso, foi dado que em  $t = 1$  temos  $T = 30$ , logo

$$30 = 25 + c5^{-k} \rightarrow 30 = 25 + 125 \cdot 5^{-k} \rightarrow k = 2$$

2. **DETERMINE** o instante em que a temperatura do corpo atinge  $26$  °C .

Como vimos no anterior, temos que  $T = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$ . Logo, para  $T = 26$  temos

$$26 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \rightarrow t = 3/2 \rightarrow t = 1,5 \text{ horas ou } t = 1 \text{ hora e } 30 \text{ minutos.}$$

3. Utilizando a aproximação  $\log_{10} 2 \approx 0,3$ , **DETERMINE** o instante em que a temperatura do corpo atinge  $75^\circ\text{C}$ .

Como  $T = 25 + 125 \cdot 5^{-2t}$ . Logo, para  $T = 75$  temos

$$75 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \rightarrow 5^{-2t} = \frac{2}{5}.$$

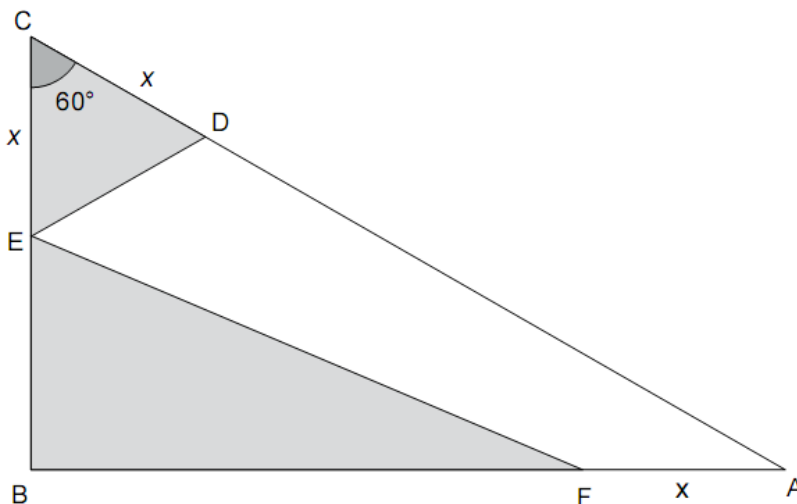
Como foi dado que  $\log 2 = 0,3$ , temos que  $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$ .

Assim, usando que  $\log 2 = 0,3$  e  $\log 5 = 0,7$ , temos

$$5^{-2t} = \frac{2}{5} \rightarrow \log 5^{-2t} = \log \frac{2}{5} \rightarrow t = \frac{2}{7}$$

### QUESTÃO 03

Nesta figura, o triângulo ABC é retângulo em B,  $\hat{C} = 60^\circ$ ,  $\overline{CE} = \overline{CD} = \overline{FA} = x$  e  $\overline{BC} = 1$ :



Considerando essas informações,

1. **EXPRESSE** a área do triângulo CED em função de  $x$ .

O triângulo CED é isósceles (pois  $CE = ED = x$ ) com ângulo do vértice medindo  $60^\circ$ . Logo, os ângulos da base também medem  $60^\circ$  e, de fato, o triângulo CED é equilátero

de lado medindo  $x$ . Logo, sua área é  $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ .

## 2. EXPRESSE a área do triângulo EBF em função de $x$ .

Como o triângulo ABC é retângulo em B, temos que  $\cos 60^\circ = BC / AC \rightarrow AC = 2$ .  
Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC temos que  $AB = \sqrt{3}$ .

Assim,  $EB = 1 - x$  e  $BF = \sqrt{3} - x$ . Logo, a área do triângulo retângulo EBF é  $\frac{(1-x)(\sqrt{3}-x)}{2}$ .

3. **CALCULE** o valor de  $x$  tal que a soma das áreas dos triângulos CED e EBF seja igual à área do quadrilátero EFAD.

Como a soma das áreas dos triângulos é igual à área do quadrilátero, temos que a soma das áreas dos triângulos é a metade da área do triângulo ABC.

$$\text{Área do triângulo CED} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área do triângulo EBF} = \frac{(1-x)(\sqrt{3}-x)}{2}$$

$$\text{Área do triângulo ABC} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Logo, } \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(1-x)(\sqrt{3}-x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2\sqrt{3} - 3.$$

Como  $BC = 1$  e  $x = EC$  é claramente menor que 1. Logo,  $x = 1$  não interessa.

Assim,  $x = 2\sqrt{3} - 3$ .

### QUESTÃO 04

No plano cartesiano, o ponto  $A = (1, 11)$  é vértice do quadrado ABCD, cuja diagonal BD está sobre a reta de equação  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas do centro  $M$  do quadrado ABCD.

Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si,  $M$  é o pé da perpendicular à reta  $y = x/2 + 3$  que passa por  $A$ .

Como o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é  $-1$ , temos que a outra diagonal é uma reta cuja equação é do tipo  $y = -2x + b$ . Como o ponto  $A(1,11)$  está nessa reta, temos  $11 = -2 + b \rightarrow b = 13$ .

Assim, a outra diagonal está na reta  $y = -2x + 13$ . Como M é o ponto de interseção dessas duas retas, M é a solução do sistema  $\begin{cases} y = x/2 + 3 \\ y = -2x + 13 \end{cases}$ . Assim,  $M = (4,5)$

## 2. DETERMINE as coordenadas do vértice C .

Como M é o ponto médio do segmento AC (as diagonais de um quadrado se cortam em seus respectivos pontos médios) temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 7.$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -1.$$

Logo, as coordenadas de C são (7,-1)

## 3. DETERMINE as coordenadas dos vértices B e D .

A distância de A até M é  $\sqrt{(1-4)^2 + (11-5)^2} = \sqrt{45}$ .

Como as diagonais do quadrado são congruentes, essa também é a distância de B ou D até M.

Assim, B e D são pontos na reta  $y = x/2 + 3$  que distam  $\sqrt{45}$  de M(4,5). Assim, as coordenadas de B e D são as soluções do sistema

$$\begin{cases} y = x/2 + 3 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 45 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas de B e D são (10,8) e (-2,2)

### QUESTÃO 05

Um bloco de madeira retangular e sólido mede 30 cm de largura, 20 cm de comprimento e 10 cm de altura e o seu exterior foi colorido de azul.

Por meio de cortes paralelos a cada uma de suas faces, esse bloco é inteiramente dividido em cubos de 1 cm de aresta, que são colocados dentro de uma urna.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** a quantidade de cubos que resultou da divisão desse bloco de madeira.

Como os lados medem 10, 20 e 30, teremos  $10 \cdot 20 \cdot 30 = 6000$  cubos.

2. **CALCULE** a probabilidade de uma pessoa retirar da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, um cubo com, **exatamente, duas** faces azuis.

Um cubo com exatamente 2 faces azuis está ao longo de uma aresta, sem ser um vértice do bloco de madeira.

Temos, portanto,  $28 \cdot 4 + 18 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 216$  cubos com exatamente 2 faces azuis.

Assim, a probabilidade de um deles ser retirado da urna é  $\frac{216}{6000} = \frac{9}{250}$

3. **CALCULE** a probabilidade de uma pessoa retirar um cubo da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, lançá-lo sobre uma mesa e obter **a face superior azul**.

Um cubo possui as três faces azuis se estiver em um dos vértices do bloco de madeira, ou seja, há apenas 8 blocos com as três faces azuis.

No anterior, verificamos que há 216 cubos com exatamente 2 faces azuis.

Um cubo com uma face azul está no meio de uma face do bloco de madeira, logo há  $18 \cdot 28 \cdot 2 + 8 \cdot 18 \cdot 2 + 28 \cdot 8 \cdot 2 = 1744$  blocos com uma face azul.

Temos agora que tirar um cubo da urna e lançá-lo sobre uma mesa, obtendo face azul. Para conseguir isso devemos:

Tirar um cubo com 3 faces azuis e obter face azul OU tirar um cubo com 2 faces azuis e obter face azul OU tirar um cubo com 1 face azul e obter face azul

$$\frac{8}{6000} \cdot \frac{3}{6} + \frac{216}{6000} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1744}{6000} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{180}$$

### QUESTÃO 06

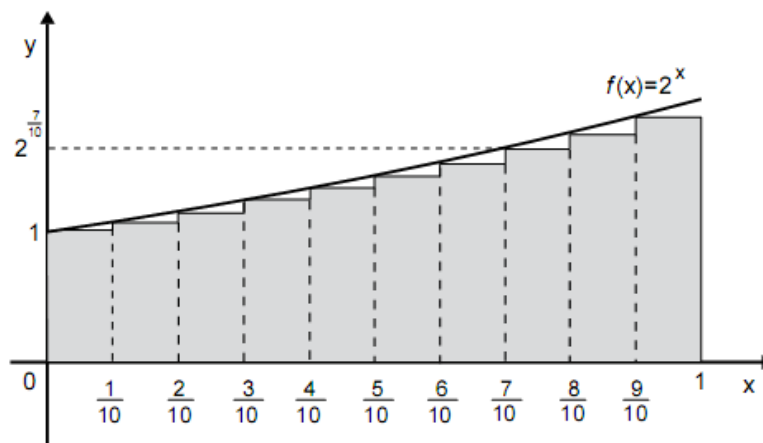
Considere uma função  $f(x)$  crescente, positiva e definida no intervalo  $[0,1]$ .

A soma parcial inferior de ordem  $n$  de  $f(x)$ , representada por  $S_n(f)$ , é definida por:

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right].$$

Essa soma é uma aproximação para o valor da área da região do plano cartesiano que se situa abaixo do gráfico da função  $f(x)$ , acima do eixo  $x$  e entre as retas de equações  $x=0$  e  $x=1$ .

A interpretação geométrica de  $S_{10}(f)$  para a função  $f(x) = 2^x$  é a área da região sombreada representada nesta figura:



Considerando essas informações,

1. **DEMONSTRE** que a soma parcial inferior de ordem  $n$  da função  $f(x) = 2^x$  é expressa,

também, por  $S_n(f) = \frac{1+r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{n-1}}{n}$  e **DETERMINE** o valor de  $r$ .

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{1}{n} \left[ 2^0 + 2^{1/n} + 2^{2/n} + 2^{3/n} + \dots + 2^{(n-1)/n} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[ 1 + 2^{1/n} + (2^{1/n})^2 + (2^{1/n})^3 + \dots + (2^{1/n})^{n-1} \right] = \\ &= \frac{1 + 2^{1/n} + (2^{1/n})^2 + (2^{1/n})^3 + \dots + (2^{1/n})^{n-1}}{n} \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $r = 2^{1/n}$ , temos o resultado pedido.

2. Utilizando a aproximação  $2 \approx (1,007)^{100}$ , **CALCULE** a soma parcial inferior de ordem 100 da função  $f(x) = 2^x$  e **ESCREVA** o resultado com aproximação de **duas** casas decimais.

Como  $2 \approx 1,007^{100}$ , temos que  $2^{1/100} \approx 1,007$ .

A soma parcial inferior de ordem 100 de  $f(x) = 2^x$  é

$$S_{100}(f) = \frac{1 + r + r^2 + \dots + r^{99}}{100} \text{ com } r = 2^{1/100}.$$

Como o numerador é uma PG de primeiro termo 1 e razão r, temos

$$S_{100}(f) = \frac{1}{100} \cdot \frac{r^{100} - 1}{r - 1} = \frac{1}{100} \cdot \frac{(2^{1/100})^{100} - 1}{2^{1/100} - 1} = \frac{1}{100} \cdot \frac{2 - 1}{1,007 - 1} = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7} = 1,428571\dots$$

Assim, com 2 casas decimais, o valor correto é aproximadamente 1,43.

## COMENTÁRIOS

### Questão 1

Boa combinação de três conceitos fundamentais do programa: geometria analítica, função do 1º grau e desigualdades no plano. No item 1 a visualização era importante e o item 2 era muito elementar, desde que o aluno interpretasse corretamente a questão.

### Questão 2

Questão altamente previsível, principalmente pelo fato de que, na 1ª etapa, não ocorreu questão que abordasse exponenciais e logaritmos. Desenvolvimento simples e tranquilo.

### Questão 3

O item 1 foi extremamente elementar. O único segredo era reconhecer que o triângulo ECD era equilátero.

No item 2, como de praxe, aparece uma aplicação do velho teorema de Pitágoras.

No item 3 a única dificuldade foi o desenvolvimento das operações com radicais.

### Questão 4

Questão esperada na abordagem da geometria analítica, ou seja, exigia que o aluno demonstrasse habilidades de lidar com reta, distâncias e circunferência aliada a uma boa visualização e conhecimentos básicos de geometria.

### Questão 5

Questão mais difícil da prova, pois são poucos os alunos que conseguem visualizar a quantidade de cubos que ficam pintados.

### Questão 6

Questão conceitual que ao utilizar o comando demonstre gera dificuldades na interpretação pelo aluno. Entretanto, o aluno que transpõe essa barreira da interpretação desenvolve os itens com facilidade

### Avaliação geral

A prova contempla todas as habilidades que se espera de um aluno calouro nos cursos de exatas, ou seja, ler, interpretar, desenvolver e argumentar. Se comparada à prova de 2009, essa está com uma qualidade superior, exigindo muita interpretação e, por isso, sendo mais difícil.