

Vestibular UFMG 2009

Prova aberta – Matemática Profª. Cecília Alves

QUESTÃO 01

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função do segundo grau, em que a , b e c são números reais. Sabe-se que

- o gráfico dessa função passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(2, 6)$; e
- essa função possui uma única raiz.

Considerando esses dados, **CALCULE** os valores de a , b e c .

Solução:

Falar que o gráfico da função passa pelos pontos $(1,3)$ e $(2,6)$ significa falar que $f(1) = 3$ e que $f(2) = 6$. Além disso, como essa função possui uma única raiz, temos que seu Δ tem que ser nulo. Traduzimos isso em um sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

Na primeira equação, isolando c obtemos $c = 3 - a - b$. Substituindo nas outras duas equações temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b + (3 - a - b) = 6 \\ b^2 - 4a(3 - a - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ b^2 - 12a + 4a^2 + 4ab = 0 \end{cases}$$

Isolando b na primeira equação temos $b = 3 - 3a$. Substituindo na segunda equação temos:

$$(3-3a)^2 - 12a + 4a^2 + 4a(3-3a) = 0 \rightarrow a^2 - 18a + 9 = 0$$

Resolvendo essa última equação temos $a = 9 \pm 6\sqrt{2}$. Lembrando que $b = 3 - 3a$ e que $c = 3 - a - b$, temos as soluções:

$$a = 9 + 6\sqrt{2}, b = -24 - 18\sqrt{2} \text{ e } c = 18 + 12\sqrt{2} \quad \text{ou} \\ a = 9 - 6\sqrt{2}, b = -24 + 18\sqrt{2} \text{ e } c = 18 - 12\sqrt{2}$$

QUESTÃO 02

Sabe-se que, para a conversão de graus Fahrenheit em graus Celsius, a fórmula correta é

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

em que T_F e T_C indicam as temperaturas em graus, respectivamente, Fahrenheit e Celsius.

Quando em viagem pelos Estados Unidos, para simplificar os cálculos, Pedro convertia a temperatura, dada em graus Fahrenheit, para o valor correspondente em graus Celsius, usando a expressão

$$\bar{T}_C = \frac{T_F}{2} - 17.$$

Durante a estada de Pedro nesse país, a temperatura variou de $-4^\circ F$ a $50^\circ F$.

Com base nessas informações,

1. **DETERMINE** a temperatura, **em graus Fahrenheit**, em que o erro cometido por Pedro, ao usar essa expressão, é **nulo**.

O erro é nulo quando $T_C = \bar{T}_C$ ou seja, $\frac{T_F}{2} - 17 = \frac{5}{9}(T_F - 32)$. Resolvendo essa equação obtemos $T_F = 14$. Assim, o erro é nulo para $T_F = 14^\circ$.

2. Defina-se **erro absoluto** como o módulo do erro.

TRACE, no plano cartesiano abaixo, o gráfico do **erro absoluto** cometido por Pedro, em função de T_F para $-4 \leq T_F \leq 50$.

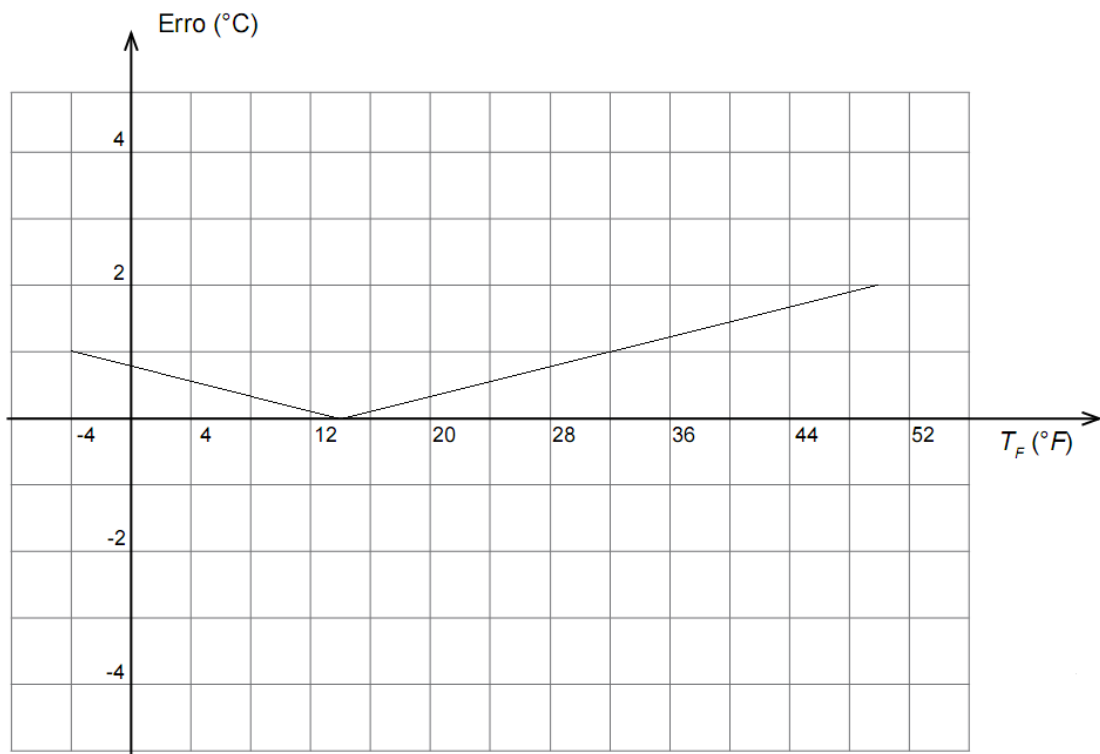
Pela definição dada, o erro absoluto é $E = |T_C - \bar{T}_C|$, ou seja,

$$E = \left| \frac{T_F}{2} - 17 - \left[\frac{5}{9}(T_F - 32) \right] \right| \rightarrow E = \left| \frac{-T_F + 14}{18} \right|$$

Temos, agora, que representar o gráfico dessa função que é o módulo de uma expressão do primeiro grau. Além disso, sabemos que o erro é nulo para $T_F = 14$.

Inicialmente, calculamos o erro para $T_F = -4$ e para $T_F = 50$ obtendo, respectivamente, 1 e 2.

Logo, o gráfico do erro é composto por dois segmentos de reta, um com extremidades em $(-4,1)$ e $(14,0)$ e o outro com extremidades em $(14,0)$ e $(50,2)$ resultando em



3. **CALCULE** o erro absoluto **máximo** cometido por Pedro para $-4 \leq T_F \leq 50$.

Como podemos observar pelo gráfico, o erro máximo cometido ocorre para $T_F = 50^\circ$ e seu valor é de 2° .

QUESTÃO 03

Considere uma circunferência de equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

em que a e b são números reais e r é um número real positivo.

Sabe-se que

- a reta de equação $y = x + 5$ tangencia essa circunferência no ponto $T = (1, 6)$; e
- a reta de equação $y = x + 3$ determina, nessa circunferência, uma corda PQ de comprimento $2\sqrt{30}$

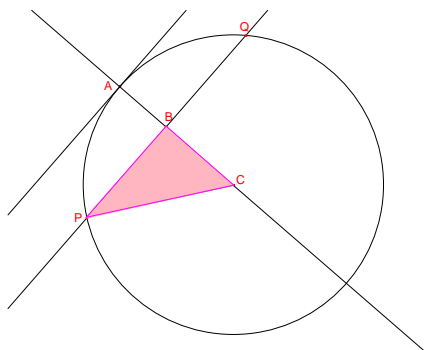
DETERMINE os valores de a , b e r .

Chamaremos de r a reta de equação $y = x + 5$ e de s a reta de equação $y = x + 3$. Como elas possuem mesmo coeficiente angular, sabemos que $r \parallel s$.

Sabemos que a reta r passa pelo ponto $(1,6)$, calculamos a distância entre r e s usando a fórmula da distância de ponto a reta (distância do ponto $(1,6)$ até a reta s).

$$D = \frac{|-1 + 6 - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Observe a figura abaixo:



Nela temos que $PC = r$, $PB = \sqrt{30}$ e $BC = r - \sqrt{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$r^2 = (\sqrt{30})^2 + (r - \sqrt{2})^2. \text{ Desenvolvendo encontramos } r = 8\sqrt{2}.$$

Para determinar as coordenadas do ponto C (centro da circunferência) usaremos que:

- A distância de C até a reta r é $8\sqrt{2}$
- C é um ponto da reta perpendicular à reta r que passa por $A = (1,6)$.

A equação dessa perpendicular é $y = -x + 7$. Temos, portanto:

$$\begin{cases} \frac{|-a+b-5|}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \\ b = -a+7 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $a = -7$ ou $a = 9$. Como $b = -a+7$ temos as soluções:

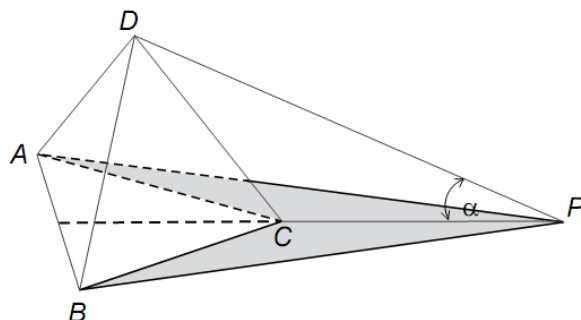
$$a = -7, b = 14, c = 8\sqrt{2} \quad \text{ou}$$

$$a = 9, b = -2, c = 8\sqrt{2}$$

Porém, a reta s fica abaixo da reta r , o que exclui a primeira solução acima. Logo, a solução final dessa questão é $a = -7, b = 14, c = 8\sqrt{2}$

QUESTÃO 04

Nesta figura, estão representadas uma pirâmide, em forma de um tetraedro regular $ABCD$, e sua sombra, em forma de um quadrilátero $ACBP$:



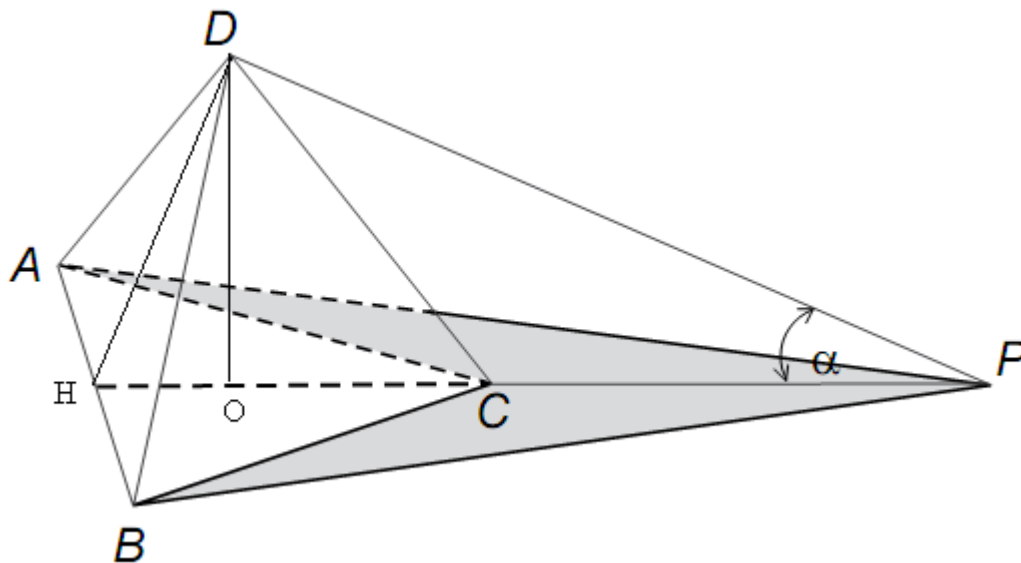
Sabe-se que

- cada aresta da pirâmide mede 20 m ;
- o segmento CP está contido na mediatriz do segmento AB ; e
- o seno do ângulo $\alpha = \widehat{CPD}$ é $\frac{2}{3}$.

Considerando esses dados,

1. **CALCULE** a altura da pirâmide.

Observe a figura:



Sabemos que O é o baricentro do triângulo equilátero de lado 20 . CH é altura do

triângulo ABC , portanto $CH = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Assim, OC mede $\frac{2}{3}CH = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo DOC encontramos $DO^2 = 20^2 - OC^2$ após substituir o valor de OC, encontramos $DO = \frac{20\sqrt{6}}{3}$ m.

2. CALCULE a área da sombra da pirâmide.

Para calcular a área da sombra da pirâmide, faremos a área do triângulo ABP menos a área do triângulo ABC.

$$\text{Área do triângulo ABP} = \frac{20 \cdot HP}{2} = 10HP$$

Calculando HP: $HP = HO + PO$.

Calculando PO: se $\sin \alpha = 2/3$, então, no triângulo retângulo DOP temos $DP = \frac{3}{2}OD$,

logo, $DP = 10\sqrt{6}$.

Por Pitágoras no triângulo DOP temos $DP^2 = OD^2 + PO^2$, assim, $PO = \frac{10\sqrt{30}}{3}$.

Além disso, HO é um terço de HC, logo $HO = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Assim, $HP = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{10\sqrt{30}}{3} = \frac{10(\sqrt{3} + \sqrt{30})}{3}$ e a área do triângulo ABP é $\frac{100(\sqrt{3} + \sqrt{30})}{3}$

Área do triângulo ABC: como esse é um triângulo equilátero de lado 20, sua área é $100\sqrt{3}$.

Assim, a área da sombra é $\frac{100(\sqrt{3} + \sqrt{30})}{3} - 100\sqrt{3} = \frac{100(\sqrt{30} - 2\sqrt{3})}{3}$ m².

QUESTÃO 05

1. Seja $z = x + iy$ um número complexo, em que x e y são números reais.

DETERMINE as partes real e imaginária de $w = \frac{z+1}{z-1}$ em função de x e y .

$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy}$. Multiplicando pelo conjugado do denominador encontramos

$$w = \frac{(x^2 + y^2 - 1) - 2yi}{(x-1)^2 + y^2}$$

Logo a parte real de w é $\frac{(x^2 + y^2 - 1)}{(x-1)^2 + y^2}$ e sua parte imaginária é $\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$.

2. Seja S o conjunto de todos os números complexos da forma $w = \frac{z+1}{z-1}$ tais que $|z| = 2$.

DETERMINE o elemento de S de maior módulo.

Se $|z| = 2$ então $x^2 + y^2 = 4$.

Como $w = \frac{(x^2 + y^2 - 1) - 2yi}{(x-1)^2 + y^2}$, substituindo $x^2 + y^2$ por 4 na expressão de w encontramos

$$W = \frac{3}{5-2x} - \frac{2y}{5-2x}i. |w| \text{ portanto será } \sqrt{\left(\frac{3}{5-2x}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{5-2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+4y^2}{(5-2x)^2}}.$$

$$\text{Substituindo } y^2 \text{ por } 4 - x^2 \text{ então teremos } |w| = \sqrt{\frac{25-4x^2}{(5-2x)^2}} = \sqrt{\frac{5+2x}{5-2x}}$$

É necessário que esse radical seja máximo. Para isso, chamaremos $5 - 2x$ de k . Portanto,

$$2x = 5 - k. \text{ Isso nos permite dizer que } |w| = \sqrt{\frac{5+5-k}{k}} = \sqrt{\frac{10}{k} - 1}.$$

Logo, o $|w|$ será máximo quando $\frac{10}{k}$ for máximo. Para isso, k deve ser mínimo. Logo,

$5 - 2x$ deve ser mínimo. Isso ocorre quando x é máximo. Mas x é a parte real de um número complexo de módulo 2, logo o valor máximo para x é 2. Portanto o valor mínimo para k é 1 e o valor máximo de $|w|$ é 3.

Então o elemento de S de maior módulo será $w = 3+0i$.

QUESTÃO 06

Rodrigo e Gabriel participam de um jogo, em que usam dois dados, cada um com seis faces.

Primeiro, Rodrigo lança os dados e, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 6, Rodrigo vence o jogo.

Se isso não ocorre, então, Gabriel lança os dados e, do mesmo modo, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 7, Gabriel vence.

Caso se verifique qualquer outro valor, o jogo prossegue, até que Rodrigo obtenha o total 6 ou Gabriel, o total 7.

Com base nessas informações, **CALCULE** a probabilidade de Rodrigo

1. vencer o jogo no **primeiro** lançamento.

O espaço amostral possui $6 \cdot 6 = 36$ resultados possíveis.

Os resultados favoráveis a Rodrigo são (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) e (5,1).

Portanto, a probabilidade de Rodrigo vencer no primeiro lançamento é $5/36$.

2. vencer o jogo fazendo, **no máximo, dois** lançamentos.

Para vencer fazendo, no máximo, dois lançamentos, ele deve vencer no primeiro ou perder no primeiro, Gabriel também perder e Rodrigo vencer no segundo.

Vencer no primeiro $\rightarrow 5/36$

Rodrigo perder no primeiro e Gabriel perder e Rodrigo ganhar em seguida:

$$\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{775}{7776}$$

Logo, a probabilidade dele ganhar em no máximo dois lançamentos é $5/36 + 775/7776 = 1855/7776$

3. vencer o jogo.

Rodrigo deve ganhar no primeiro lançamento: probabilidade $\frac{5}{36}$

No segundo: probabilidade $\frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)$

No terceiro: probabilidade $\frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)^2$

No quarto: probabilidade $\frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)^3$ e assim sucessivamente.

A probabilidade total de vencer o jogo é a soma dessas probabilidades, ou seja.

$$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right) + \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)^2 + \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)^3 + \dots$$

Como $\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} = \frac{155}{216}$, que é um número que está entre 0 e 1, a soma acima se refere a soma dos elementos de uma PG infinita de razão $155/216$ e primeiro termo $5/36$.

Logo, essa soma é dada por $\frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{30}{61}$.