MATEMÁTICA

vestibular UFMG 2008

Prova de 2ª Etapa

a ciência é você quem faz

SÓ ABRA QUANDO AUTORIZADO.

Leia atentamente as **instruções que se seguem.**

1 - Este Caderno de Prova contém **oito** questões, constituídas de itens e subitens, e é composto de **dezesseis** páginas, numeradas de 3 a 15.
Antes de começar a resolver as questões, verifique se seu Caderno está **completo**.
Caso haja algum problema, solicite a **substituição** deste Caderno.

> **ATENÇÃO**: Os Aplicadores **NÃO** estão autorizados a dar quaisquer explicações sobre questões das provas. **NÃO INSISTA** em pedir-lhes ajuda.

2 - Esta prova vale **100** pontos, assim distribuídos:
- Questões 01, 04, 06 e 07: **12** pontos cada uma.
- Questões 02, 03, 05 e 08: **13** pontos cada uma.

3 - **NÃO escreva seu nome nem assine nas folhas desta prova.**
4 - Leia cuidadosamente cada questão da prova e escreva a solução, **A LÁPIS**, nos espaços correspondentes.
Só será corrigido o que estiver dentro desses espaços.
NÃO há, porém, obrigatoriedade de preenchimento **total** desses espaços.
5 - **NÃO serão consideradas respostas sem exposição de raciocínio.**
6 - Não escreva nos espaços reservados à correção.
7 - Ao terminar a prova, entregue este Caderno ao Aplicador.

FAÇA LETRA LEGÍVEL.

Duração desta prova: TRÊS HORAS.

Impressão digital do polegar direito

DIGITAL

> **ATENÇÃO:** Terminada a prova, recolha seus objetos, deixe a sala e, em seguida, o prédio. A partir do momento em que sair da sala e até estar fora do prédio, continuam válidas as proibições ao uso de aparelhos eletrônicos e celulares, bem como não lhe é mais permitido o uso dos sanitários.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

QUESTÃO 01

Um professor de Matemática escreve no quadro os n primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$-50, -46, -42, \ldots, a_n.$$

Se esse professor apagar o **décimo** termo dessa seqüência, a média aritmética dos termos restantes será 23.

CALCULE o termo a_n.

$a_n = a_1 + (n-1)\,r = -50 + (n-1)4 = 4n - 54,\ a_{10} = 40 + 54 \Rightarrow\ a_{10} = -14$

$S_n = (a_1 + a_n)\,\dfrac{n}{2}$

$Sn = \dfrac{(-50 + 4n - 54)\frac{n}{2} + 14}{n-1} = 23$

$-52n + 2n^2 + 14 = 23n - 23$

$2n^2 - 75n + 37 = 0$

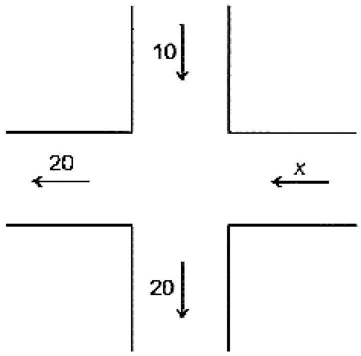
$n = 37 \qquad n = \dfrac{1}{2}$ n. serve

Resposta $a_{37} = a_1 + 36r = -50 + 36 \,.\, 4 = 94$

Resposta = 94

QUESTÃO 02

1. **Suponha que**, num cruzamento de ruas de **mão única**, as médias de veículos que, por **minuto**, **entram** e **saem desse** cruzamento são mostradas neste diagrama:



Seja x a **média** de veículos que entram, por **minuto**, no cruzamento, pela rua **horizontal**, **no sentido leste–oeste**.

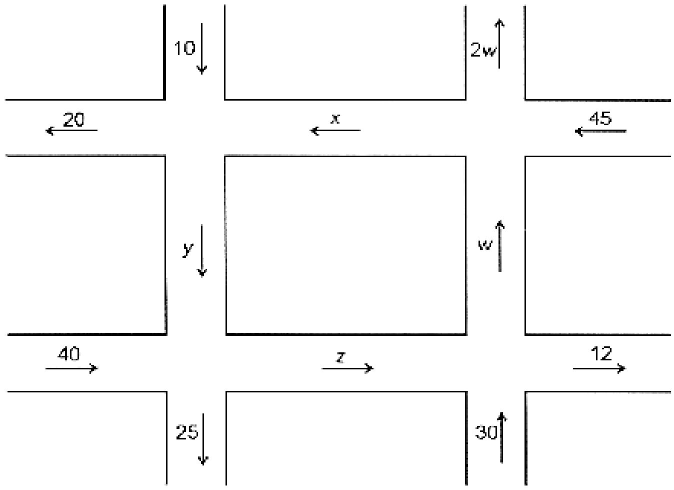
CALCULE o valor de x.

entram $x + 10$
saem 40

$x + 10 = 40$

$x = 30$

2. Suponha, agora, que, numa região do centro de uma cidade, com ruas de mão única, as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem dos cruzamentos são mostradas neste diagrama:



Sejam x, y, z e w as médias de veículos que, por minuto, entram ou saem de cada um dos quatros cruzamentos, mostrados nesse diagrama.

CALCULE os valores de x, y, z e w.

2.

$$\begin{cases} x + 10 = y + 20 \\ w + 45 = x + 2w \\ y + 40 = 25 + z \\ z + 30 = w + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 10 & (1) \\ x + w = 45 & (2) \\ z - y = 15 & (3) \\ z - w = -18 & (4) \end{cases}$$

$(1) - (2)\quad w + y = 35\ (5)$
$(3) + (4)\quad -w + y = -33\ (6)$
$(5) + (6)\ 2y = 2 \qquad y = 1 \rightarrow \quad w = 34$
$x = 11 \rightarrow z = 16$

$x = 11$
$y = 1$
$z = 16$
$w = 34$

QUESTÃO 02

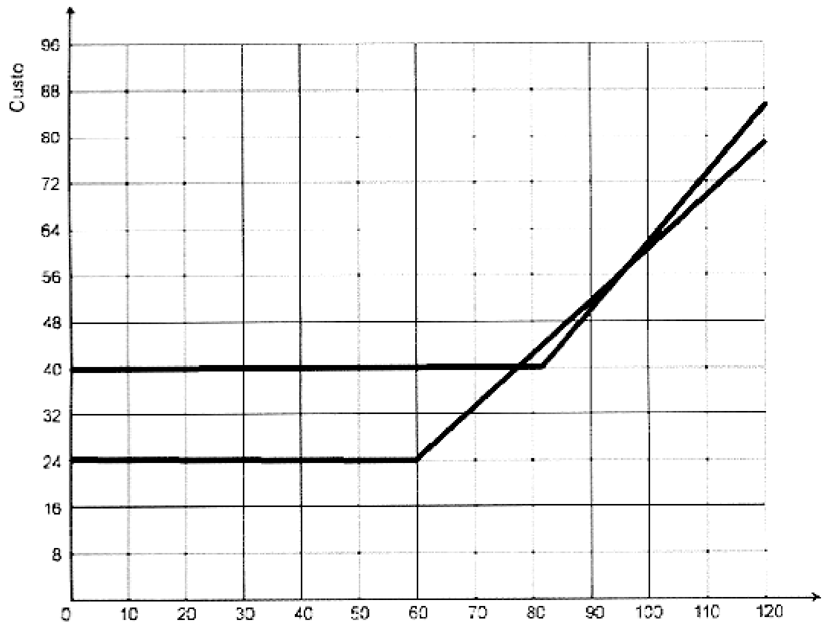
QUESTÃO 03

Uma concessionária de energia elétrica de certo estado brasileiro possui dois planos de cobrança para consumo residencial:

- o Plano **I** consiste em uma taxa mensal fixa de R$ 24,00, que permite o consumo de até 60 *kWh*, e, a partir desse valor, cada *kWh* extra consumido custa R$ 0,90;

- o Plano **II** consiste em uma taxa mensal fixa de R$ 40,00, que permite o consumo de até 80 *kWh*, e, a partir desse valor, cada *kWh* extra consumido custa R$ 1,10.

1. **ESBOCE**, no sistema de coordenadas abaixo, os gráficos das funções que representam o custo para o consumidor, em função do consumo de energia elétrica, no Plano **I** e no Plano **II**.



x n° kwh consumido

Plano I $C_1(x) = \begin{cases} 24{,}00 & x \leq 60 \\ 24 + (x - 60).0{,}90 & x > 60 \end{cases}$

Plano II $C_2(x) = \begin{cases} 40{,}00 & x \leq 80 \\ 40 + (x - 80)1{,}1 & x > 80 \end{cases}$

2. **DETERMINE** a faixa de consumo em que o Plano **II é mais** vantajoso para o consumidor.

$40 + (x-80)1,1 < 24 + (x-60).0,09$
$40 + 1,1x - 88 < 24 + 0,9x - 54$
$0,2x < 48 - 30$
$0,2x < 18$
$x < \frac{18}{0,2} \qquad x < 90$

$24 + (x-60)\;.\;0,9 - 40$
$0,9x = 54 + 40 - 24$
$0,9x = 70$
$x = \frac{70}{0,9} = 77,7$

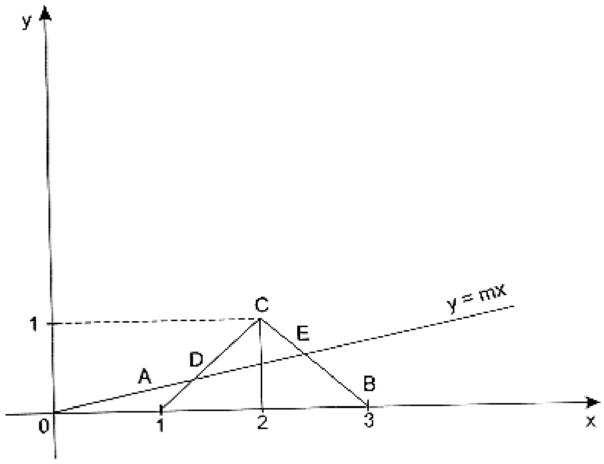
Resposta: $77,7 < x < 90$

QUESTÃO 03

QUESTÃO 04

Seja *ABC* um triângulo cujos vértices, em coordenadas cartesianas, são $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (2, 1)$

CALCULE a inclinação *m* da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e divide esse triângulo em **duas** regiões de **áreas iguais**.



$y = mx$ (reta que passa por (0,0))

Reta AB $\rightarrow y = x - 1$
Reta BC $\rightarrow y = -x + 3$

Interseção reta $y = mx$ c/ $y = x - 1$

$mx = x - 1 \qquad x = \dfrac{-1}{m-1}, y = \dfrac{-m}{m-1} \qquad D = \left(\dfrac{-1}{m-1}, \dfrac{-m}{m-1}\right)$

interseção reta $y = mx$ c/ $y = -x + 3$ $\left(\dfrac{3}{m+1}, \dfrac{3m}{m+1}\right)$

$x = \dfrac{3}{m+1} \qquad y = \dfrac{3m}{m+1}$

área $\Delta ABC = 1$ área $\Delta DCE = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \dfrac{-1}{m-1} & \dfrac{-m}{m-1} & 1 \\ \dfrac{3}{m+1} & \dfrac{3m}{m+1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}$$

1°

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \dfrac{-1}{m-1} & \dfrac{-m}{m-1} & 1 \\ \dfrac{3}{\dfrac{3}{m+1}} & \dfrac{3m}{m+1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\frac{-3m}{m^2-1}}+\frac{3}{m+1}\quad\frac{-2m}{m-1}\quad\frac{-6m}{m+1}\quad\frac{1}{m-1}+\cancel{\frac{3m}{m^2-1}}=1$$

$$\frac{-2m+1}{m-1}+\frac{3-6m}{m+1}=1$$

$$(-2m+1)(m+1)+(3-6m)(m-1)=m^2-1$$

$$-2m^2-2m+m+1+3m-6m^2-3+6m-m^2+1=0$$

$$-9m^2+8m-1=0$$

$$9m^2-8m+1=0$$

$$m=\frac{8\pm\sqrt{64-36}}{18}$$

$$m=\frac{8\pm2\sqrt{7}}{18}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{9}$$

2º determinante $= -\frac{1}{2}$

$$-7m^2+8m-3=0$$

$$7m^2-8m+3=0$$

$$m=\frac{8\pm\sqrt{64-84}}{14}\quad\nexists$$

$$\text{Resposta: } m=\frac{4-\sqrt{7}}{9}\qquad \text{pois } 0<m<\frac{1}{2}$$

QUESTÃO 05

Considere o sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = a^2 \\ y = |x| \end{cases}$$

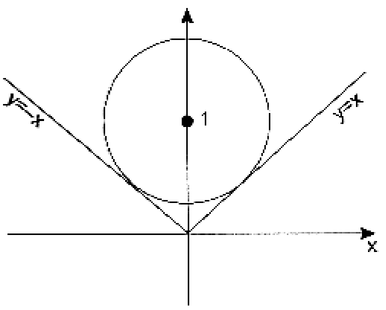
em que a é um número real positivo.

DETERMINE o número de soluções distintas desse sistema em função de a.

QUESTÃO 05

$x^2 + (y-1)^2 = a^2$ Circunferência de centro (0,1) e

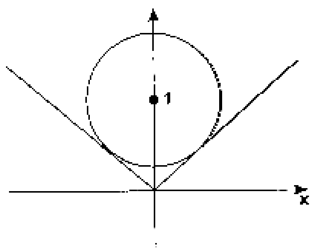
$$y = |x| = \begin{cases} y = x & x \geq 0 \\ y = -x & x < 0 \end{cases}$$



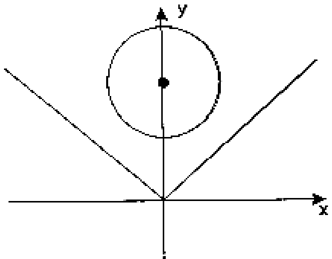
distância de (0,1) a reta $y - x = 0$) e a reta $y + x = 0$ é

$d = \frac{|1-0|}{\sqrt{2}}$ $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

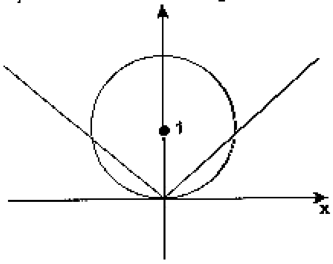
1) Se $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ sistema possui 2 soluções



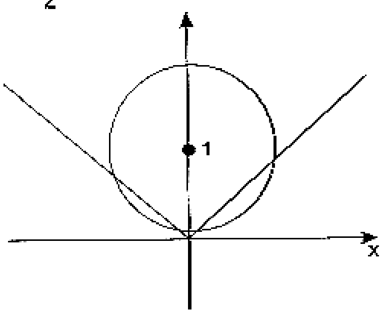
2) Se $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ sistema não possui solução



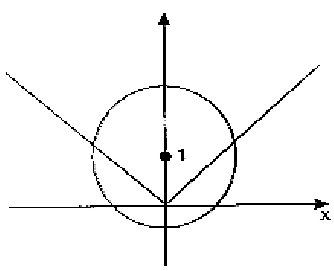
3) Se $a = 1 \rightarrow 3$ soluções



4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1 \rightarrow 4$ soluções

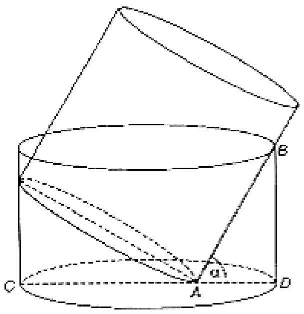


5) $a > 1 \rightarrow 2$ soluções



QUESTÃO 06

Nesta figura, estão representados um tanque cilíndrico e um cilindro sólido metálico, ambos circulares retos:



O cilindro sólido encontra-se apoiado sobre o fundo e a lateral do tanque, que está, inicialmente, vazio.

Sabe-se que

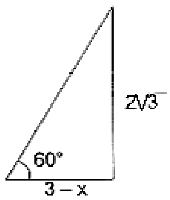
- a altura e o raio do tanque medem, respectivamente, $2\sqrt{3}$ m e 3 m;
- o ponto A pertence ao diâmetro CD da base do tanque; e
- o ângulo $\alpha = B\hat{A}D$ mede 60°.

1. **CALCULE** o raio do cilindro sólido metálico.

QUESTÃO 06

1.

$\triangle ADB$

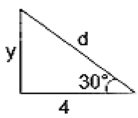


$$\text{tag}\,60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3-x}$$

$$\sqrt{3}(3-x) = 2\sqrt{3}$$

$$x = 1$$

$\triangle CEA$



$$\text{tag}\,30^\circ = \frac{y}{4}$$

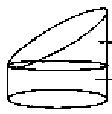
$$\frac{\sqrt{3}}{3}.4 = y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$d = \frac{16}{3} + 16 = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\text{raio} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

2. **CALCULE** o volume de água necessário para, na situação descrita, se encher **completamente** o tanque.

2. Volume tanque $9\pi \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi$



Volume tronco

Volume (1) $\pi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{4}{3}$

Volume (2) $\pi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}$

V. água $= \left(18\sqrt{3}\pi - \frac{128\pi}{9}\right) m^3$

QUESTÃO 06

QUESTÃO 07

Lílian possui sete pares de meias brancas, quatro pares de meias cinza, três pares de meias pretas e cinco pares de meias azuis.

Sabe-se que as meias de mesma cor são idênticas.

Suponha que todas essas meias estão embaralhadas em uma gaveta e que Lílian retira dela, aleatoriamente, certo número de meias.

Considerando essas informações, **DETERMINE**

1. o número **mínimo** de pés de meia que Lilian deve retirar dessa gaveta para ter certeza de ter, **pelo menos**, **um** par de meias de uma mesma cor.

$$\left.\begin{array}{l} 14b \\ 8c \\ 6P \\ 10A \end{array}\right\} 38 \qquad \text{Resposta cinco}$$

2. a probabilidade de Lilian, ao retirar **exatamente dois** pés de meia dessa gaveta, obter **um** par de meias de uma mesma cor.

tirar 2 brancas $\frac{14}{38} x \frac{13}{37}$

tirar 2 cinzas $\frac{8}{38} x \frac{7}{37}$

tirar 2 pretas $\frac{6}{38} x \frac{5}{37}$

tirar 2 azuis $\frac{10}{38} x \frac{9}{37}$

$$\frac{14x13 + 56 + 30 + 90}{38x37} = \frac{7x13 + 28 + 15 + 45}{19x37}$$

$$\frac{91 + 88}{703} = \frac{179}{703}$$

Resposta: $\frac{179}{703}$

3. a probabilidade de Lilian, ao retirar quatro pés de meia dessa gaveta, obter, pelo menos, um par de meias de uma mesma cor.

3.

Com 4 meias formamos 1 par ou 2 pares ou nenhum. Só não serve nenhum

$\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{P}\ \underline{A} \rightarrow 4!$

$$\frac{14}{38} \times \frac{8}{37} \times \frac{6}{36} \times \frac{10}{35}$$

$$\frac{2 \times 8 \times 1 \times \cancel{5}}{19 \times 37 \times 6 \times \cancel{5}} \times \cancel{24}$$

$$\frac{2 \times 32}{703} = \frac{64}{703} \Rightarrow \frac{639}{703}$$

QUESTÃO 07

QUESTÃO 08

1. **ESCREVA** na forma trigonométrica os números complexos

$$(\sqrt{3}+i) \quad e \quad 2\sqrt{2}(1+i)\ ,$$

em que $i^2 = -1$.

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6})$$

$$2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4})$$

2. **CALCULE** os menores inteiros positivos m e n tais que

$$(\sqrt{3}+i)^m = \left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^n .$$

$$2^m\left(\cos m\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{m\pi}{6}\right) = 4^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$2^m = 4^n \quad e \quad \frac{m\pi}{6} = n\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2^m = 4^n$$

$$m = 2n$$

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{4} + 2k$$

$$2m - 3n - 24k = 0$$

$$4n - 3n - 24k = 0$$

$$n = 24k$$

$$k = 1 \qquad n = 24 \Rightarrow m = 48$$